Električna mjerenja
(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore

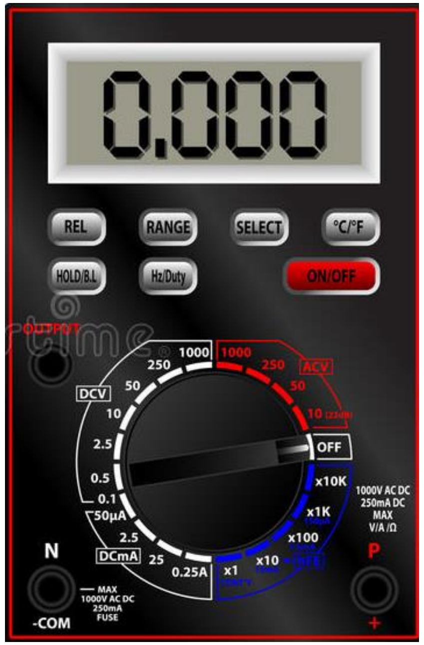
Elektrotehnički fakultet

Električni mjerni instrumenti

- Električni mjerni instrumenti - uređaji u kojima se ostvaruje **interakcija mjerene veličine i dijela instrumenta koji se pokreće** pod uticajem te veličine
- Služe za neposredno mjerenje električnih veličina – npr. napona, struje, snage, otpora, faktora snage, frekvencije, kapaciteta itd.
- Karakteristike mjernih instrumenata su:

1. električna veličina koja se mjeri,
2. vrsta struje ili napona,
3. preciznost, odnosno stepen tačnosti,
4. princip djelovanja.

- Dijele se na električne i elektronske mjerne uređaje
- Prema principu rada dijele se na **analogne i digitalne**
- Kod digitalnih mjernih instrumenata, rezultat mjerenja je u digitalnom obliku
- Analogni mjerni instrumenti koriste mehanički sistem za mjerenje električnih veličina i rezultat mjerenja prikazuju pomoću kazaljke i skale
  - zasnovan na različitim principima, u zavisnosti od vrste instrumenta - elektromagnetske, elektrostatičke, elektrotermičke i elektrolitičke pojave
- Prvobitni mjerni instrumenti imali su elektromehaničku konstrukciju
- Kod ovakvih instrumenata, indikacija rezultata mjerenja bazira se na kretnim sistemima - mjerena veličina deluje mehaničkom silom na pokretni dio instrumenta sa skalom i otklanja ga zajedno sa kazaljkom
- **otklon instrumenta zavisi od vrijednosti mjerene veličine**



- Određenoj vrijednosti mjerene veličine odgovara određeni položaj pomičnog dijela instrumenta, odnosno kazaljke

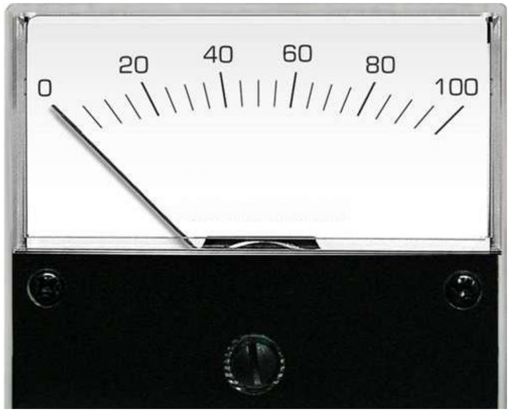
- Na pomični dio djeluje mehanički ili električni protivmoment koji se suprotstavlja momentu mjerene veličine
- Pomični dio zauzima položaj gdje su oba momenta u ravnoteži

- Pomični dio, pri nagloj promjeni vrijednosti mjerene veličine, treba što prije da zauzme novi položaj ravnoteže. Da u tom slučaju ne bi došlo do oscilacija, dodaje se još jedan prigušni moment koji sprečava oscilacije

- Način djelovanja mjerene veličine na pomični organ zasnovan je na različitim principima u zavisnosti od vrste instrumenta - koriste se elektromagnetske, elektrostatičke, elektrotermičke, pa i elektrolitičke pojave.

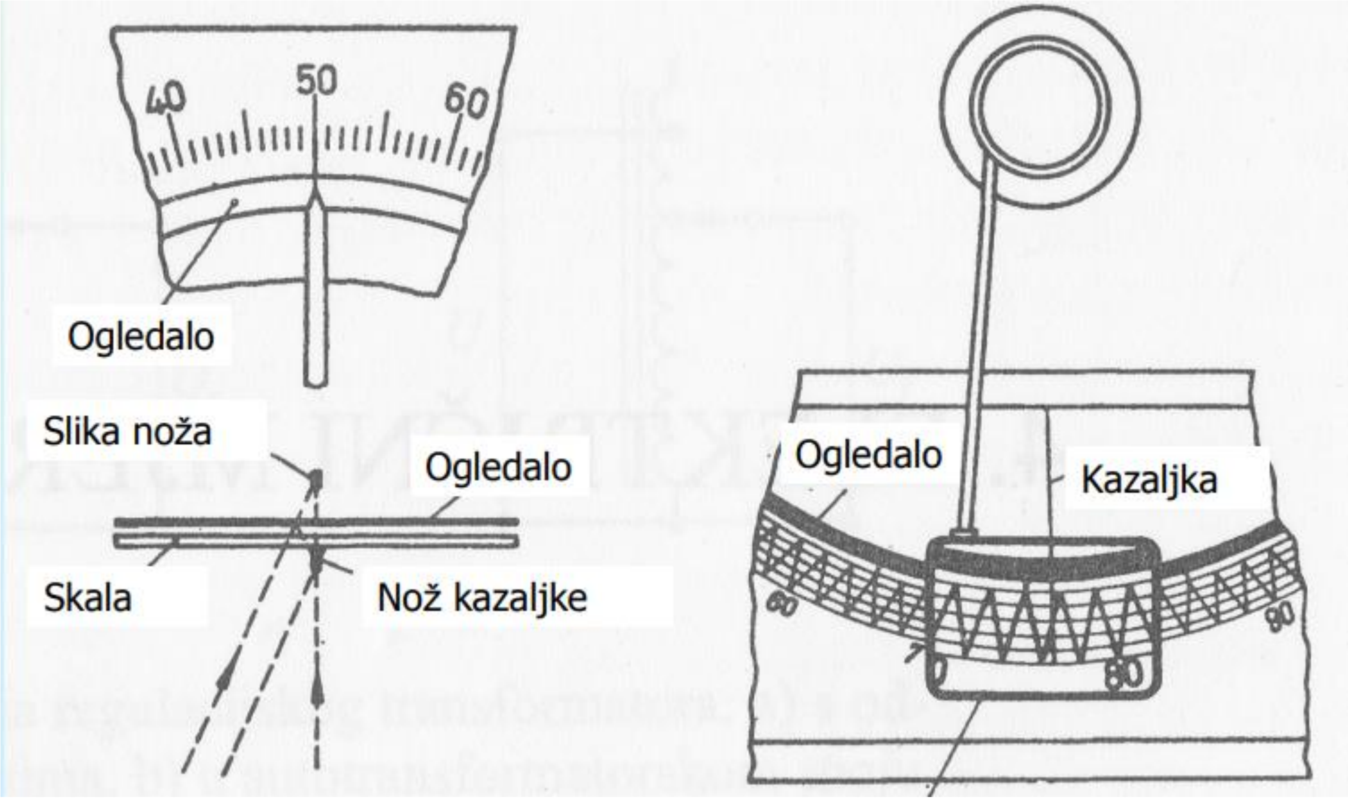
- Protivmomenti koji se protive kretanju mjernog mehanizma moraju zavisiti od položaja mjernog mehanizma (spiralne opruge, torzione trake)
- Kako se pomični organ zaustavlja u položaju gdje su momenti u ravnoteži, i moment izazvan mjerenom veličinom će biti srazmjeran otklonu pomičnog dijela instrumenta
- Na taj način se dobija tražena zavisnost otklona od vrijednosti mjerene veličine
- Kretni sistemi koji se koriste kod analognih instrumenata su: – mehanički sa kazaljkom ili optičkim pokazivačem na skali
- Skala ima podjelu u vidu crtica ili tačaka s pripadajućom numeracijom
- Sve crtice nisu jednako duge - obično su svaka peta i svaka deseta crtica duže od ostalih

- Skala može biti **linearna** (podioci ravnomjerno raspoređeni) ili **kvadratna i logaritamska** (podioci neravnomerno raspoređeni)

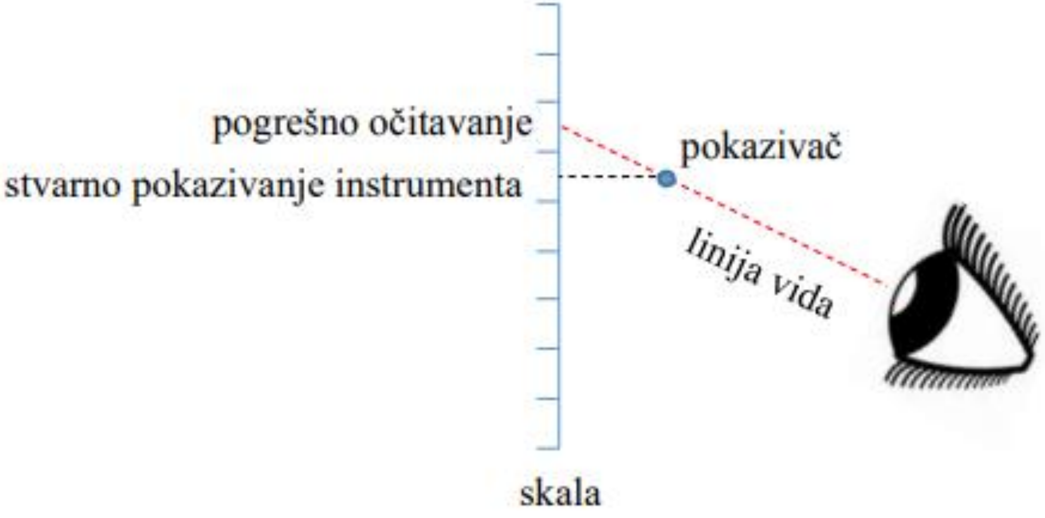


- Veličina skale, broj crtica i njihova debljina biraju se u zavisnosti od preciznosti instrumenta
  - Precizni laboratorijski instrumenti imaju obično više od sto crtica (najčešće 150), u razmaku od oko 1 mm
  - Debljina crtica iznosi ispod 0.1 mm
- Pogonski instrumenti se izrađuju s manje crtica i one su znatno deblje
- Kazaljke su takođe prilagođene traženoj preciznosti instrumenta
- Oblik kazaljke može biti:
  - *oblik strelice*, za gruba pogonska merenja (Na pogonskim instrumentima očitanje nije tako tačno, ali su kazaljke robustnije i bolje odgovaraju pogonskim prilikama)
  - *oblik noža*, za precizna laboratorijska mjerenja

- Kako je kazaljka malo odmaknuta od skale da bi se mogla slobodno kretati, postoji opasnost netačnog očitavanja zbog paralakse ukoliko posmatrač ne gleda uspravno na skalu
- Zato se obično **uz** skalu, ispod kazaljke, nalazi ogledalo
- Posmatrač treba da se postavi tako da kazaljka pokrije svoju sliku u ogledalu pa se na taj način izbjegava greška zbog paralakse



greška zbog paralakse
(sistematska greška)



Druga važna karakteristična veličina mjernih instrumenata označava da li isti služi za mjerenje jednosmjernih ili naizmjeničnih veličina. Prema vrsti struje (napona) mjerni instrumenti nose dodatnu oznaku, odnosno simbol kako je to prikazano u Tabeli 3.

Mjerena veličina	Naziv instrumenta	Simbol
Struja i napon	Galvanometar	G
Struja	Amperimetar	A
Napon	Voltmetar	V
Snaga	Vatmetar	W
Energija	Brojilo	kWh
Otpor	Ommetar	Ω

Simbol	Značenje simbola
—	Instrument za jednosmjernu struju (napon)
~	Instrument za naizmjeničnu struju (napon)
≂	Instrument za jednosmjernu i naizmjeničnu struju (napon)

Simbol	Sistem djelovanja
	Istrument sa pomičnim kalemom
	Instrument sa pomičnim željezom
	Elektrodinamički instrument
	Bimetalni instrument

- **Osnovni parametri električnih mjernih instrumenata:**
- **Mjerni opseg** (A_m), pokazuje za koje mjerene vrijednosti instrument može tačno da mjeri, npr. 0-250 V, 0-10 A
- **Konstanta instrumenta** (C), daje vrijednost jednog podioka u jedinicama mjerene veličine: $C=A_m/N$, N – broj podioka na skali
- **Tačnost** - koliko instrument najbliže može da odredi vrijednost mjerene veličine u odnosu na njenu pravu vrijednost
  - Klasa tačnosti pokazuje koliku procentualnu grešku čini dati instrument
- **Osjetljivost** $S=1/C$
  - Što je osjetljivost instrumenta veća, to se njime mogu mjeriti manje vrijednosti mjerene veličine.
- **Ispitni napon**, govori koliki najveći napon može da izdrži instrument a da ne dođe do probijanja.
- **Unutrašnji otpor**, omski otpor kalema.
- **Histerezis** je veličina greške mjernog instrumenta koja nastaje na izlazu, kada se mjernoj vrijednosti prilazi bilo njenim smanjenjem ili povećanjem. Izazivaju ga zaostaci magnetne energije, efekti trenja ili elastične deformacije.

Dinamika mjernog mehanizma

- M1 – obrtni moment koji djeluje na pomični dio instrumenta i koji je zavistan od vrijednosti mjerene veličine
  - M1 je funkcija mjerene veličine X i otklonskog ugla alfa (**α**) pomičnog dijela
- M2- protivmoment (direkcioni moment) koji zavisi od otklona pomičnog dijela i funkcija je otklonskog ugla **α**
- otklonski ugao **α** je funkcija mjerene veličine X

$$M_1 = f_1(X, \alpha)$$
$$M_2 = f_2(\alpha)$$

$$\alpha = f(X)$$

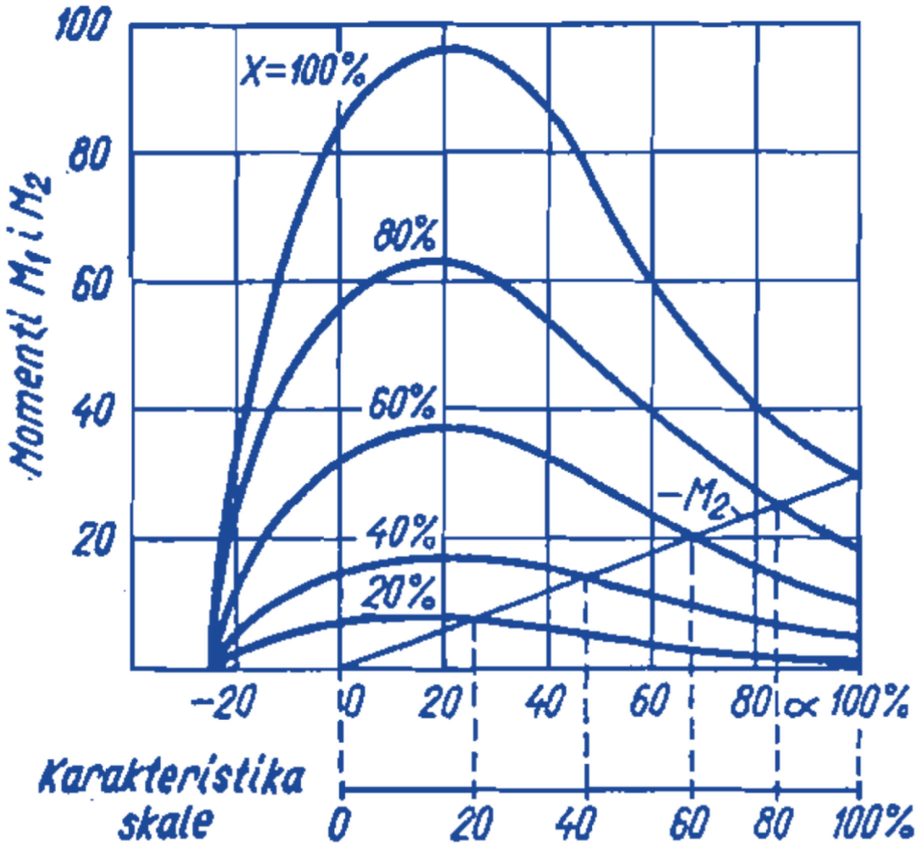
- Pomični organ će zauzeti onaj položaj u kojem su ova dva momenta u ravnoteži:

$$M = M_1 + M_2 = 0$$

- Ako su poznate funkcije f_1 i f_2 može se za svaku vrijednost mjerene veličine *X* odrediti ugao otklona **α**

- Moment M_1 je prikazan kao funkcija ugla otklona alfa za vrijednosti mjerene veličine koje iznose 20, 40, 60, 80 i 100% vrijednosti mjerene veličine pri punom otklonu
- Protivmoment je linearna funkcija ugla alfa i postiže se npr. pomoću spiralnih opruga
- Presjeci M_1 i M_2 daju tačke ravnoteže, odnosno otklone za 20, 40, 60, 80 i 100% vrijednosti mjerene veličine pri punom otklonu

- Zavisnost momenata M_1 i M_2 od ugla alfa mora biti takva da osigurava stabilan rad pomičnog dijela instrumenta
- Ako se, pri nepromijenjenoj vrijednosti mjerene veličine, pomični dio pomjeri za neki ugao $\Delta\alpha$, momenti M_1 i M_2 će se također promijeniti i to za ΔM_1 i ΔM_2 pa će se ravnoteža poremetiti
- Za stabilan rad, suma $\Delta M_1 + \Delta M_2$, tako djelovati tako da povrati pomični dio u ravnotežni položaj



Određivanje karakteristike skale na osnovu momenta M1 mjerene veličine X i protivmomenta M2

- Upotrebljivost instrumenta zavisi i od ponašanja pomičnog dijela pri promjeni mjerene veličine
- Pomični dio treba da **što je moguće brže prati** promjene mjerene veličine, kao i da se u **što kraćem vremenu smiri na novom položaju** koji odgovara promijenjenoj vrijednosti mjerene veličine
- **Razmotrimo npr. moment M_1 u sistemu sa pomičnim kalemom**
- M_1 je proporcionalan struji *i* koja protiče kroz pomični kalem: $M_1 = f(X) = Gi$

- Moment spiralnih opruga ili torzionih traka M_2 proporcionalan je uglu otklona pomičnog dijela i suprotstavlja se momentu M1 (D je direkciona konstanta): $M_2 = -D\alpha$

- Električni moment prigušenja M_{3e} je posledica postojanja struja u pomičnom kalemu ili njegovim metalnim djelovima a koje su indukovane kretanjem pomičnog kalema u magnetnom polju stalnog magneta. Proporcionalan je ugaonoj brzini i djeluje suprotno smjeru obrtanja pomičnog kalema:

$$M_{3e} = -P_e \frac{d\alpha}{dt}$$

- Osim ovog postoji i moment trenja koji je posljedica kretanja pomičnog dijela u vazduhu – **mehanički moment prigušenja**

$$M_{3m} = -P_m \frac{d\alpha}{dt}$$

- **Ukupni moment prigušenja** dobija se sumiranjem momenata M_{3e} i M_{3m} i proporcionalan je ugaonoj brzini (P je ukupna konstanta prigušenja):

$$M_3 = M_{3e} + M_{3m} = -P_e \frac{d\alpha}{dt} - P_m \frac{d\alpha}{dt} = -P \frac{d\alpha}{dt}$$

- Tokom pomjeranja pomičnog dijela djeluje i moment M_4 koji se protivi ubrzanju pomičnog dijela i proporcionalan je njegovom ugaonom ubrzanju:

$$M_4 = -J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

  - ***J* - Moment tromosti pomičnog dijela**
  - **Dobija se kao integral proizvoda elementa mase *dm* i kvadrata njegove udaljenosti od ose rotacije *r***

$$J = \int r^2 \, dm$$

- **D'Alambertovo pravilo: SUMA MOMENATA KOJI DJELUJU NA SLOBODNI SISTEM JEDNAKA JE NULI**

$$\sum M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0$$

- Uvrštavanjem izraza za momente M_1, M_2, M_3 i M_4 dobija se **diferencijalna jednačina kretanja pomičnog dijela instrumenta**:

$$J\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + P\frac{d\alpha(t)}{dt} + D\alpha(t) = G\,i(t)$$

- Pri naglom uključenju instrumenta, kroz njega protekne jednosmjerna struja *I*
- Diferencijalna jednačina postaje:

$$J\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + P\frac{d\alpha(t)}{dt} + D\alpha(t) = G\,I$$

- Ovo je nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda
- Rješava se Laplace-ovim transformacijama

$$J\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}+P\frac{d\alpha(t)}{dt}+D\alpha(t)=GI$$

$$p^2J\bar{\alpha}(p)-Jp\alpha(0)-J\alpha'(0)+pP\bar{\alpha}(p)-P\alpha(0)+D\bar{\alpha}(p)=\frac{GI}{p}$$

Neka u momentu uključivanja struje (t=0) instrument nema otklona [α(0)=0] i neka mu je pri tome brzina jednaka nuli [α'(0)=0] , pa se prethodni izraz pojednostavljuje:

$$p^2J\bar{\alpha}(p)+pP\bar{\alpha}(p)+D\bar{\alpha}(p)=\frac{GI}{p}$$

ili:

$$\bar{\alpha}(p)=\frac{GI}{p(p^2J+pP+D)}=\frac{GI}{J(p-p_1)(p-p_2)p}$$

Tu su p_1 i p_2 korjeni jednačine: $p^2J+pP+D=0$ $\Rightarrow$ $p_{1,2}=-\frac{P}{2J}\pm\sqrt{\frac{P^2}{4J^2}-\frac{D}{J}}$

ili sa smjenama: $\eta=\frac{P}{2J}$ i $\beta=\sqrt{\frac{P^2}{4J^2}-\frac{D}{J}}$ $\Rightarrow$ $p_{1,2}=-\eta\pm\beta$

Rastavljajući izraz za $\bar{\alpha}(p)$ na parcijalne razlomke dobijamo:

$$\bar{\alpha}(p)=\frac{GI}{J}\left[\frac{1}{pp_1p_2}+\frac{1}{p_1-p_2}\left(\frac{1}{p_1(p-p_1)}-\frac{1}{p_2(p-p_2)}\right)\right]$$

Original ove funkcije glasi:

$$\alpha(t)=\frac{GI}{J}\left[\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1-p_2}\left(\frac{e^{p_1t}}{p_1}-\frac{e^{p_2t}}{p_2}\right)\right]$$

Uvrštavanje izraza za p_1 i p_2 dobijenih na prethodnom slajdu dobijamo:

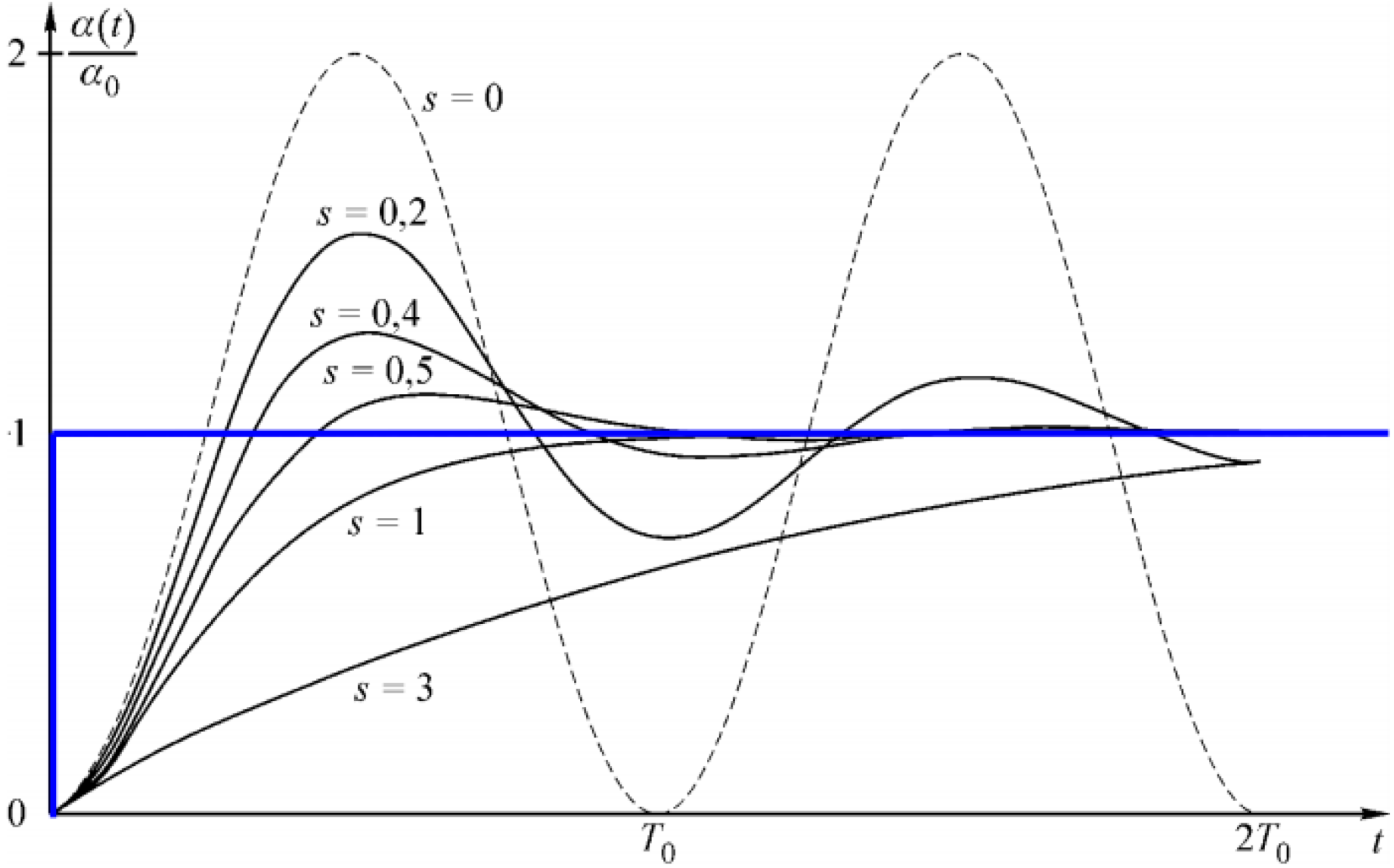
$$\alpha(t)=\frac{GI}{Jp_1p_2}\left[1+\frac{1}{2\beta}e^{-\eta t}\left(p_2e^{\beta t}-p_1e^{-\beta t}\right)\right]$$

Dalje je:

$$\frac{GI}{Jp_1p_2} = \frac{GI}{D} = \alpha_0$$

gdje je α_0 stacionarni otklon instrumenta nakon završetka prelazne pojave. Momenti M_3 i M_4 tada su jednaki nuli, pa ostaje: M_1=M_2 ili D α_0=*GI,* odnosno α_0 =*GI*/*D* . Stoga slijedi:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 + \frac{1}{2\beta} e^{-\eta t} \left(p_2 e^{\beta t} - p_1 e^{-\beta t} \right) \right]$$



$\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}$
2
1
0
$s = 0$
$s = 0,2$
$s = 0,4$
$s = 0,5$
$s = 1$
$s = 3$
T_0
$2T_0$
t

$$\alpha(t)=\alpha_0\left[1+\frac{1}{2\beta}e^{-\eta t}\left(p_2e^{\beta t}-p_1e^{-\beta t}\right)\right]$$

- Za kretanja pomičnog dijela značajno je to da li je β imaginaran ili realan broj
- Ako je β imaginaran pomični dio će se kretati manje-više prigušeno zavisno od faktora e^{-nt}
- Ako je β realan javlja se aperiodično (neoscilatorno) kretanje pomičnog dijela
- Izmedu ta dva suprotna stanja mora postojati prelazno stanje, (β = 0), koje se naziva

aperiodično granično kretanje

- *s* – stepen prigušenja → $s=\dfrac{P}{2\sqrt{DJ}}$

Vrsta kretanja	Prigušenje	Stepen prigušenja
Oscilatorno neprigušeno kretanje	$P=0$	s=0
Oscilatorno prigušeno kretanje	$P<2\sqrt{DJ}$	s<1
Granično aperiodično kretanje	$P=2\sqrt{DJ}$	s=1
aperiodično kretanje	$P>2\sqrt{DJ}$	s>1

Oscilatorno neprigušeno kretanje

- Razmotrimo prvo idealizovani slučaj, u kom je prigušenje pomičnog dijela jednako nuli
- Kako je $P = 0$ to su p_1 i p_2:

$$p_1 = j\sqrt{\frac{D}{J}} = j\omega_0, \qquad p_2 = -j\sqrt{\frac{D}{J}} = -j\omega_0$$

- Pa je:

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0\left(1 - \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) = \alpha_0(1 - \cos\omega_0 t)}$$

- Što znači da bi pomični dio stalno oscilovao sa kružnom frekvencijom ω_0 i otklonima od nule do dvostruke vrijednosti stacionarnog otklona
- Vrijeme oscilovanja, koje nazivamo ***prirodnim vremenom oscilovanja***, iznosi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$$

Oscilatorno prigušeno kretanje

- β je imaginaran, s<1, $\beta = j\omega$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - e^{-\eta t} \left(\frac{\eta}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right]$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\omega^2}} e^{-\eta t} \sin \left(\omega t + arctg \frac{\omega}{\eta} \right) \right]$$

- Pokretni dio će oscilovati frekvencijom ω, odnosno sa vremenom oscilovanja: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- Kako je $\omega = \sqrt{\frac{D}{J} - \frac{p^2}{4J^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 + \eta^2}}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\omega^2}}$

Oscilatorno prigušeno kretanje

- Pa je: $$\alpha(t)=\alpha_0\left[1-\frac{T}{T_0}e^{-\eta t}\sin\left(\omega t+arctg\frac{\omega}{\eta}\right)\right]$$

- Kako je: $$\frac{\omega}{\eta}=\frac{\sqrt{1-s^2}}{s};\quad \frac{T}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}};\quad \omega=\frac{2\pi\sqrt{1-s^2}}{T_0};\quad \eta=\frac{2\pi s}{T_0},$$

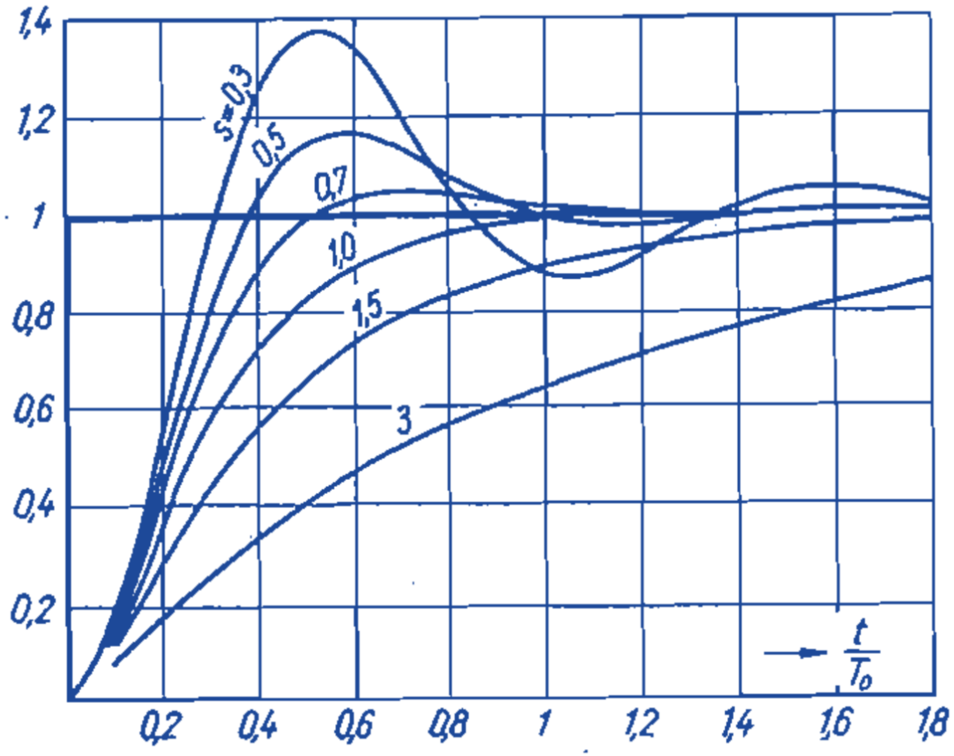
- Slijedi da se izraz $$\alpha(t)=\alpha_0\left[1-\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\omega^2}}e^{-\eta t}\sin\left(\omega t+arctg\frac{\omega}{\eta}\right)\right]$$
može pisati kao:

$$\alpha(t)=\alpha_0\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}e^{-\frac{2\pi st}{T_0}}\sin\left(\frac{2\pi\sqrt{1-s^2}}{T_0}t+arctg\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\right)\right]$$

- Na slici je prikazano kako stepen prigušenja utiče na kretanje pomičnog dijela (kretanje za stepene prigušenja s=0.3, s=0.5 i s= 0.7 određeno je izrazom:

$$\alpha(t)=\alpha_0\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}e^{-\frac{2\pi st}{T_0}}\sin\left(\frac{2\pi\sqrt{1-s^2}}{T_0}t+arctg\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\right)\right]$$

kretanje pomičnog dijela instrumenta nakon uključivanja konstantne mjerene veličine



- Eksperimentalno određivanje stepena prigušenja instrumenta iz odnosa između prvog maksimalnog otklona α_1, i otklona α_0 za stacionamo stanje
- U trenutku kada pomični dio dostigne maksimalan otklon, njegova je brzina jednaka nuli:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}=0\right)$$

$$\alpha(t)=\alpha_0\left[1-\frac{T}{T_0}e^{-\eta t}\sin\left(\omega t+arctg\frac{\omega}{\eta}\right)\right]$$

$$\frac{\eta T}{T_0}e^{-\eta t}\sin\left(\omega t+arctg\frac{\omega}{\eta}\right)-\frac{\omega T}{T_0}e^{-\eta t}\cos\left(\omega t+arctg\frac{\omega}{\eta}\right)=0$$

- Iz prethodne relacije slijedi: $\omega t = N\pi$

gdje je *N* cijeli broj

- Otklon postiže **minimum pri parnom *N***, a **maksimum pri neparnom *N***

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga*tgb}$$

- Vrijeme prvog maksimuma t_1 može se odrediti ako uvrstimo $N = 1$ u relaciju:

$$\omega t = arctg\left(\frac{\omega}{\eta} - \frac{\omega}{\eta}\right) = N\pi$$

- Pa je: $\omega t_1 = \frac{2\pi\sqrt{1-s^2}}{T_0} t_1 = \pi$ ili $t_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}}$

- **Vrijednost prvog maksimalnog otklona α_1** dobija se uvrštavanjem dobijenog vremena t_1 u *izraz za $\alpha(t)$:*

$$t_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}}, \qquad \alpha(t) = \alpha_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} e^{-\frac{2\pi s t}{T_0}} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{1-s^2}}{T_0} t + arctg\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\right)\right]$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} e^{-\frac{\pi s}{\sqrt{1-s^2}}} \sin\left(\pi + arctg\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\right)\right]$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\left[1 + e^{-\frac{\pi s}{\sqrt{1-s^2}}}\right]$$

- Stepen prigušenja se može odrediti iz odnosa prvog maksimalnog otklona i stacionarnog otklona:

$$\frac{1}{s} = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_0}}\right)^2}$$

Granično aperiodično kretanje

- Pri kružnoj frekvenciji $\boldsymbol{\omega}$ = 0, tj. kada je $P = 2\sqrt{DJ}$ oscilatorno kretanje prelazi u aperiodično
- Korijeni karakteristične jednačine su tada jednaki i realni: $p_{1,2} = -\eta = -\sqrt{\frac{D}{J}}$
- Jednačina ima oblik: $\bar{\alpha}(p) = \frac{GI}{Jp(p-p_1)^2} = \frac{GI}{Jpp_1^2\left(1-p/p_1\right)^2} = \frac{GI}{Jp_1^2}\frac{1}{p}\frac{1}{\left(1-p/p_1\right)^2}$
- Original te funkcije je: $\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{GI}{Jp_1^2}\left[1-(1-p_1t)e^{p_1t}\right]$

$\frac{GI}{Jp_1^2}$ - Otklon α_0 pri stacionarnom stanju, a $p_1 = -\sqrt{D/J} = -2\pi/T_0$ se

dobija uvrštanjem u: $\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{GI}{Jp_1^2}\left[1-(1-p_1t)e^{p_1t}\right]$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0\left[1-\left(1+\frac{2\pi t}{T_0}\right)e^{-2\pi t/T_0}\right]$$

Aperiodično kretanje

- Koeficijent prigušenja *P* poprima veću vrijednost od one koja odgovara graničnom aperiodičnom kretanju
- Vrijednost pod korijenom u karakterististnoj jednačini je pozitivna, pa je β realan: $p_{1,2} = -\eta \pm \beta$
- Uvrštavanjem krojena u relaciju $\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 + \frac{1}{2\beta} e^{-\eta t} \left(p_2 e^{\beta t} - p_1 e^{-\beta t} \right) \right]$ dobija se:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left\{ 1 - e^{-\eta t} \left[\frac{\eta}{\beta} \frac{(e^{\beta t} - e^{-\beta t})}{2} + \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \right] \right\}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - e^{-\eta t} \left(\frac{\eta}{\beta} sh\beta t + ch\beta t \right) \right]$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - e^{-\eta t} \frac{\omega_0}{\beta} sh\left(\beta t + Arth \frac{\beta}{\eta} \right) \right]$$

kretanje pomičnog dijela instrumenta nakon uključivanja konstantne mjerene veličine